10.4–ҮТ

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін екі тәсілмен шешу керек:
а) жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеуге келтіру;
б) сипаттама теңдеу арқылы

1.1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^{t} \\ y = 3C_1e^{5t} - C_2e^{t} \end{cases}$.**)**

1.2. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{t} \\ y = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t} \end{cases}$.**)**

1.3. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} \\ y = \frac{1}{2}C_1e^{3t} - \frac{1}{4}C_2e^{-3t} \end{cases}$.**)**

1.4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{-3t} + C_2e^{t} \\ y = \frac{1}{3}C_1e^{-3t} - C_2e^{t} \end{cases}$.**)**

1.5. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{5t} \\ y = C_1 - 4C_2e^{5t} \end{cases}$.**)**

1.6. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{-t} \\ y = 3C_1e^{t} + C_2e^{-t} \end{cases}$.**)**

1.7. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{5t} \\ y = 3C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \end{cases}$.**)**

1.8. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-t} \\ y = -2C_1 - 3C_2e^{-t} \end{cases}$.**)**

1.9. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{-t} \\ y = C_1e^{t} - C_2e^{-t} \end{cases}$.**)**

1.10. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} \\ y = -C_1 e^{t} - \dfrac{3}{2} C_2 e^{2t} \end{cases}$.)

1.11. $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-2t} \\ y = C_1 e^{t} + C_2 \end{cases}$.)

1.12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t} \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{8t} \end{cases}$.)

1.13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t} \\ y = 2C_1 e^{2t} + \dfrac{1}{3} C_2 e^{7t} \end{cases}$.)

1.14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ **Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \end{cases}$.)

1.15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t} \\ y = -C_1 e^{-t} + \dfrac{5}{3} C_2 e^{7t} \end{cases}$ **.)**

1.16. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t} \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 + 3C_2 e^{7t} \end{cases}$.)

1.17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{9t} \\ y = -C_1 e^{t} + C_2 e^{9t} \end{cases}$.)

1.18. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} \end{cases}$.)

1.19. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{-t} + \dfrac{1}{2} C_2 e^{3t} \end{cases}$.)

1.20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{4t} + C_2e^{7t} \\ y = -\dfrac{1}{2}C_1e^{4t} - 2C_2e^{7t} \end{cases}$ **.)**

1.21. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \\ y = -\dfrac{1}{2}C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{4t} + C_2e^{8t} \\ y = -C_1e^{4t} + \dfrac{1}{3}C_2e^{8t} \end{cases}$ **.)**

1.23. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{5t} \\ y = C_1e^{3t} - C_2e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{6t} \\ y = -\dfrac{1}{4}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2e^{6t} \end{cases}$ **.)**

1.25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{9t} \\ y = -\dfrac{3}{4}C_1e^{-t} + \dfrac{1}{2}C_2e^{9t} \end{cases}$ **.)**

1.26. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \\ y = -4C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.27. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{2t} \\ y = C_1e^{-4t} - \dfrac{1}{5}C_2e^{2t} \end{cases}$ **.)**

1.28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} \\ y = \dfrac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} \end{cases}$ **.)**

1.29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} \\ y = -\dfrac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t} \end{cases}$ **.)**

1.30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t} \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t} \end{cases}$ **.)**

10.4 –ҮТ шығару үлгісі

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін екі тәсілмен:
а) жоғары ретті дифференциалдық теңдеуге келтіру;
б) сипаттаушы теңдеу көмегімін шешу керек:

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \quad x = x(t), \quad x' = \dfrac{dx}{dt}, \\ y' = -2x - 5y, \quad y = y(t), \quad y' = \dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

▼а) Бірінші теңдеуді дифференциалдаймыз: $x'' = -7x' + y'$.

Мұндағы y'-ты оның екінші теңдеудегі өрнегімен ауыстырамыз: $x'' = -7x' - 2x - 5y$. Бұл теңдеудегі y-ті бірінші теңдеуден табылған $y = x' + 7x$ өрнегімен ауыстырамыз. Сонда екінші ретті дифференциалдық теңдеу аламыз: $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$, $x'' + 12x' + 37x = 0$. Соңғы теңдеуді бізге белгілі әдіспен шешеміз (§ 10.9 қараңыз): $\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$, $\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 37} = -6 \pm i$,

$$x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

Бұдан $x'' = -6e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-6t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right)$.

x пен x' - үшін алынған өрнектерді $y = x' + 7x$ -ке қоя отырып,

$$y = -6e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-6t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right) +$$
$$+7e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

аламыз. Олай болса келесі функциялар ізделінген шешім болады:

$x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)$, $y = e^{-6t}\left(C_1\left(\cos t - \sin t\right) + C_2\left(\cos t + \sin t\right)\right)$;

б) Сипаттаушы теңдеу құрамыз және оны шешеміз:

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (7+\lambda)(5+\lambda)+2=0,$$

$$\lambda^2+12\lambda+37=0, \quad \lambda_{1,2}=-6\pm i.$$

Бірінші түбір $\lambda_1=-6+i$ үшін келесі жүйені аламыз:

$$\left.\begin{aligned} (-7+6-i)\alpha+ \qquad\qquad \beta=0, \\ -2\alpha+(-5+6-i)\beta=0, \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} -(1+i)\alpha+ \qquad \beta=0, \\ -2\alpha+(1-i)\beta=0. \end{aligned}\right\}.$$

Мұнда $\alpha=1$, $\beta=1+i$ деп алып, бастапқы теңдеуден бірінші дербес шешімін табамыз: $x_1=e^{(-6+i)t}$, $y_1=(1+i)e^{(-6+i)t}$.

Екінші түбір $\lambda_2=-6-i$ үшін келесі жүйені аламыз:

$$\left.\begin{aligned} (-7+6+i)\alpha+ \qquad\qquad \beta=0, \\ -2\alpha+(-5+6+i)\beta=0, \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} (-1+i)\alpha+ \qquad \beta=0, \\ -2a+(1+i)\beta=0 \end{aligned}\right\}.$$

Мұнда $\alpha=1$ және $\beta=1-i$ деп алып, бастапқы теңдеудің екінші дербес шешімін аламыз: $x_2=e^{(-6-i)t}$, $y_2=(1-i)e^{(-6-i)t}$. Шешімдердің жаңа фундаменталды (іргелі) жүйесіне келесі формулалар бойынша өтеміз:

$$\bar{x}_1=\frac{(x_1+x_2)}{2}, \quad \bar{x}_2=\frac{(x_1-x_2)}{(2i)}, \quad \bar{y}_1=\frac{(y_1+y_2)}{2}, \quad \bar{y}_2=\frac{(y_1-y_2)}{(2i)}.$$

Эйлер формуласын: $e^{(\alpha\pm\beta i)t}=e^{at}(\cos\beta t\pm i\sin\beta t)$ пайдаланып мына теңдіктерді аламыз $\bar{x}_1=e^{-6t}\cos t$, $\bar{x}_2=e^{-6t}\sin t$,

$$\bar{y}_1=e^{-6t}(\cos t-\sin t), \qquad \bar{y}_2=e^{-6t}(\cos t+\sin t)..$$

Бастапқы теңдеудің жалпы шешімі $x=C_1\bar{x}_1+C_2\bar{x}_2$, $y=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2$, яғни $x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$,

$$y=e^{-6t}\big(C_1(\cos t-\sin t)+C_2(\cos t+\sin t)\big). \quad \blacktriangle$$